矩阵乘法的本质是什么？

目录结构

问题1:

小明今天要做饭，消耗2斤肉，1斤蔬菜。肉每斤20元，蔬菜每斤5元，则一共需多少花费？

> 我尝试写一个浅显的解释：
> 本题目前下面的解释都是线性代数教材上的各种定义，但都太过复杂了。

这个问题的答案很简单：

$$20\times2+5\times1=45$$

我们用向量相乘的方法写出来：

$$\begin{pmatrix}20 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=45$$

问题 2:

如果小明第二天有另一种做饭的方法，需要消耗1斤肉，4斤蔬菜，那么这两种方法的花费各是多少呢？

我们显然需要另算这第二种方法的花费。把这个做饭方式写在第二个矩阵（向量是宽度或长度为1的矩阵）里：

$$\begin{pmatrix}20 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 40\end{pmatrix}$$

小明家附近还有另一个菜市场，那里肉每斤15元，蔬菜每斤10元。那么，小明如果去这个菜市场，花费又是多少呢（分别计算上述两种做饭方式）？

我们把这另外的一种价格写进第一个矩阵里：

$$\begin{pmatrix}20 & 5\\15 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 40\\40 & 55\end{pmatrix}$$

这样我们看到了一个矩阵乘法的例子。

在左边的这个矩阵的每一行，都代表了一种价目表；在右边的矩阵的每一列，都代表了一种做饭方式。

那么所有可能的组合所最终产生的花费，则在结果矩阵中表示出来了。

结论:

小明有一天成为了餐厅大厨，小红做掌柜兼管算账。我们假设物价不变。

小红发现，如果今天买10斤肉花了A元，明天买20斤肉就得花2A元。如果买一斤肉要花C元，买1斤菜要花D元，那么买一斤肉和一斤菜就要花(C+D)元。

每天小明汇报今日的材料消耗之后，小红便会将材料消耗转为需要花的钱数。如果材料消耗翻倍，花的钱数也翻倍。另外，如果去不同的菜市场，也会得到不同的花钱数量。

小明每月送来一张长列表，里面是每日的材料消耗；而经过小红的处理，这张列表会转为每日，在不同的菜市场购买这些材料的花费。材料消耗翻倍，花费也翻倍。我们管这种从材料列表转为开销表的过程，就叫做一个线性映射。这也即是矩阵乘法的意义。

最后补充一点。线性代数的引入方式因教材不同而不同。从代数学自身的体系来讲，可能从线性空间引入是相对完备的；但是从一般我们学习知识的理解顺序来讲，从线性方程组引入最为合适。因

为只要还记得鸡兔同笼，就很容易理解线性方程组，从而推广到矩阵，然后是线性变换，线性空间
。按这样顺序讲授的教材推荐华章数学译丛的：线性代数.原书第8版.Leon.S.J.著.张文博译.机械工业
出版社.2010

参考地址：

张一苇 => https://www.zhihu.com/question/21351965/answer/31050145

阮一峰, 理解矩阵乘法 => http://www.ruanyifeng.com/blog/2015/09/matrix-multiplication.html

---